Etude d'une fraction rationnelle

1) Etude du signe / Equation / Inéquation :

Etudier un signe c'est résoudre f(x) > 0 (ou f(x) < 0, ou …)
Pour résoudre $f(x) \leq 2$ on étudie le signe de $f(x) - 2$
L'idée est d'utiliser un tableau de signe, avec dans chaque ligne des expressions de degré 1 ou 2. Mais il faut donc commencer par mettre au même dénominateur et factoriser !

a) mettre au même dénominateur et factoriser une expression :

Pour mettre au même dénominateur, il faut multiplier en haut et en bas chaque fraction par le même terme, afin que chaque fraction ai le même dénominateur.
Il faut ensuite factoriser le haut puis le bas pour ne plus avoir que des expressions de degré 1 ou 2 dont on sait étudier le signe.

b) Utiliser un tableau de signe :

Il faut prendre garde aux « 0 » des termes au dénominateur : Ce sont des valeurs interdites pour le quotient, donc il faut une double barre dans la ligne résultats.

c) Répondre à la question :

Il faut être vigilant au sens des crochets, surtout avec les valeurs interdites.

2) Calcul de la dérivée étude du signe de la dérivée:

On utilise la formule de la dérivée d'un quotient :
la dérivée est une autre fraction rationnelle.
Pour étudier le signe de la dérivée, on va donc utiliser les techniques vu au 1 .
Remarquons tout de même que le dénominateur est un carré, donc positif ou nul.

3) Déterminer la limite en + ∞ (ou - ∞):

La limite d'une fraction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
Remarque : une méthode plus élégante pour démontrer est de factoriser par le terme de plus haut degré numérateur et dénominateur, puis d'utiliser les opérations avec des limites.

4) Déterminer les limites à droite et à gauche des valeurs interdites :

On obtient souvent des limites du type $\frac{a}{0} = \infty$, le problème est alors de savoir si la limite est + ou - ∞. Il faut alors se demander si le dénominateur se rapproche de 0 par valeur positive (0_+) ou négative (0_-). Utiliser ensuite le signe de *a* et la règle des signes.

5) Construire le tableau de variation :

On fera figurer les doubles barres correspondantes aux valeurs interdites ainsi que les limites et valeurs de la fonction aux extrémums locaux. Lorsque le résultat est complexe, on peut faire figurer f(1) par exemple, puis effectuer le calcul à coté.

6) Asymptotes :

a) asymptotes verticales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$$

Lorsqu'on cherche la limite à droite ou à gauche d'un nombre a (souvent une valeur interdite) et que l'on obtient + ou - ∞, on dit que $x = a$ est asymptote verticale à la courbe.

b) Asymptotes horizontale :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Lorsqu'on cherche la limite en + ou - ∞ et que l'on obtient un nombre finie a, on dit que la droite $y=a$ est asymptote horizontale à la courbe.

c) Asymptotes obliques :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Lorsqu'on cherche la limite en + ou - ∞ et que l'on obtient ±∞ ; dans certains cas la courbe « ressemble » ou « se comporte comme » une droite en + ou - ∞.
Dans ce cas, on cherche à montrer que la distance entre la courbe et la droite se rapproche de 0 en + ou - ∞.
Notons que l'équation de la droite peut être donnée dans l'énoncé, mais qu'on peut aussi la conjecturer à partir du dessin ou de l'expression numérique.

Dans les trois cas, l'existence d'une asymptote se prouve grâce à un calcul de limites

7) Position relative de la courbe et de son asymptote :

Il s'agit de savoir si la courbe est au dessus ou au dessous de son asymptote. Pour cela on étudie le signe de la différence des deux équations.
On peut poser une nouvelle fonction g(x) = f(x) – (a x+b) qui sera une autre fraction rationnelle. On étudie son signe comme rappelé dans le 1)

Exercice : Construire le tableau de variation de chacune des fractions rationnelles suivantes ; déterminer les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes :

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x}$ b) $g(x) = 1 + x + \dfrac{9}{x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ d) $f(t) = 3 + 2x + \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x+4}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x+4}$ h) $f(f) = \dfrac{2x^2 - x}{x+1}$

Remarque : pour les asymptotes obliques, on peut :
- Soit conjecturer l'équation de l'asymptote grâce au dessin, puis prouver.
- Soit factoriser une partie du numérateur par le dénominateur pour faire apparaître une forme « ou l'asymptotes se voit » :

ex : $\dfrac{2x^2-x}{x+1} = \dfrac{2x(x+1) - 3x}{x+1} = \dfrac{2x(x+1) - 3(x+1) + 3}{x+1} = 2x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$